

7 conseils

Voici quelques indications importantes concernant la résolution des exercices en "structures fondamentales" (mais aussi plus généralement dans tous vos cours de maths). Cette liste s'appuie sur les questions qui reviennent le plus souvent pendant les sessions d'exercices.

① Pour montrer qu'un objet (fonction, ensemble, groupe ...) vérifie une propriété qui commence par le quantificateur " $\forall$ ":

ex: $\forall b \in B, \exists a \in A, f(a) = b.$

↳ On commence par "Soit"

ex: Soit $b \in B.$

(On construit un élément de A , qui dépend de b , qui satisfait la propriété)

② Pour montrer que deux ensembles A, B sont égaux:

ex: Montrer que $Z(G) = \{ g \in G \mid \text{la classe de conjugaison de } g \text{ est } \{g\} \}$

↳ On utilise le principe de double inclusion $A \subseteq B, B \subseteq A.$

⚠ Comme $A \subseteq B \Leftrightarrow \forall a \in A, a \in B$, la solution commence par: "Soit $a \in A$ " par ①

③ Pour montrer une propriété sur un ensemble A dont on ne "sait" pas bien quels sont ces éléments.

ex:

gH

ex:

$f^{-1}(B)$

↳ Il est toujours (enfin, dans ce cours) possible d'exprimer un ensemble comme ceci:

$$A = \left\{ x \in \Omega \mid \begin{array}{l} \text{propriété que } x \\ \text{doit satisfaire} \\ \text{pour être dans } A \end{array} \right\}$$

$\uparrow$
 un plus grand ensemble dans lequel A est contenu

si $H \leq G$, $gH = \{ x \in G \mid \exists h \in H, x = gh \}$

si $f: A \rightarrow \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$ $f^{-1}B = \{ x \in A \mid f(x) \in B \}$

4) Il y a deux grands types d'exercices dans les différentes feuilles:

Type 1 :

① Montrer que

$$Z(G) = \{ g \in G \mid \text{la classe de conjugaison de } g \text{ est } \{g\} \}$$

"général"

Type 2 :

② Montrer que $(\mathbb{Z}/16\mathbb{Z})^*$

est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

"exemple"

↳ Vous devez savoir dans quel catégorie l'exercice que vous essayez de résoudre se trouve, pour adapter votre stratégie:

Bonne idée: trouver des exemples qui vous aident à vous représenter le problème, à vous convaincre que

Bonne idée: si l'on parle de petits groupes, listez leurs éléments, explicitez la loi, calculez quelques produits et ordre... vous devriez sûrement

l'affirmation est correcte.

exemple: classe de conjugaison de (12) dans S_2 et dans S_3 .

Mauvaise idée: Adopter un raisonnement trop général, passant à côté des hypothèses.

trouver des éléments particuliers.
par exemple, un élément d'ordre 4 dans $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^\times$.

Mauvaise idée: en général, commencer par "Soit $g \in G$ " ne servira à rien.

↳ Dans les 2 cas, il est rare de ne pas avoir à utiliser toutes les hypothèses. Après avoir résolu un exercice, vérifiez toujours si vous avez bien utilisé toutes les hypothèses.

De même, vous devez savoir précisément ce que signifie chacune avant d'essayer de résoudre le problème.

5) Travailler sur les notations.

↳ Un symbole peut être utilisé pour des choses différentes :

Exercice* 4 (Classes de conjugaison de S_n). 1. Établissez la formule de conjugaison des cycles : pour $n \geq 1$ et $\sigma \in S_n$, on a

$$\sigma \circ (i_1 \dots i_r) \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i_1) \dots \sigma(i_r)).$$

2. En utilisant la formule précédente, montrez que deux permutations $\sigma, \tau \in S_n$ appartiennent à la même classe de conjugaison si et seulement leur décomposition en produit de cycles disjoints sont du même type (c'est-à-dire : pour tout $r \geq 2$, les nombres de r -cycles dans les décompositions de σ et de τ sont égaux).

Dans cet exo, le " σ " de la question 1 n'a pas le même rôle que dans la question 2.

← ensemble

↳ les notations comme $f^{-1}(A)$, gH , gHg^{-1} ont une définition. Vous ne devez pas deviner ce que sont ces objets (même si elles sont suggestives), et surtout vous ne devez pas inventer des manipulations

Par exemple, le produit $gHg^{-1}H$ n'a pas de sens "a priori" on peut déclarer que c'est égal à $gg'H$, mais on a vu que ce n'a pas de sens en général.

↳ attention avec l'utilisation des notations additives et multiplicatives.

Lorsqu'on parle d'un groupe abstrait, on utilise les notations multiplicatives:

$$gh, g^{-1}, g^n, gH \dots$$

Lorsqu'on parle d'un groupe particulier, tout dépend de sa loi. Pour un groupe additif comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on aura:

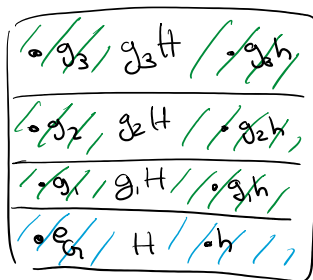
$$g+h, -g, ng, g+H \dots$$

⚠ Un même groupe peut être vu comme un groupe pour différentes lois!

Ex: $(S_2, \circ) \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, +) \simeq ((\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^*, \cdot)$

$$\begin{array}{ccccc} \text{id} & \longleftrightarrow & 0 & \longleftrightarrow & 1 \\ (12) & \longleftrightarrow & 1 & \longleftrightarrow & -1 \end{array}$$

6) Pensez aux classes à gauche comme à des "étages".



Vous devez avoir compris que:

- si $g \notin H$, $gH \cap H = \emptyset$
en particulier $e_H \notin gH$
et gH n'est pas un sous-groupe
- $\forall h \in H, hH = H$.
- $\forall g' \in gH, gH = g'H$.

Exemple:

$G = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ et

3	7
2	6
1	5
0	4

$H = \langle \bar{4} \rangle = \{ \bar{0}, \bar{4} \}$

$g_1 = 1 \quad g_1 + H = \{ \bar{1}, \bar{5} \} \quad \begin{array}{l} = h + g_1 \\ = \bar{4} + \bar{1} \end{array}$

$g_2 = 2 \quad g_2 + H = \{ \bar{2}, \bar{6} \} \quad \begin{array}{l} = h + g_2 \\ = \bar{4} + \bar{2} \end{array}$

$g_3 = 3 \quad g_3 + H = \{ \bar{3}, \bar{7} \} \quad \begin{array}{l} = \bar{4} + \bar{3} \\ = h + g_3 \end{array}$

↳ quotient $\simeq \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$

7) lorsqu'on vous demande de montrer qu'une application $f: A \rightarrow B$ est bien définie, il faut vérifier qu'elle associe bien un unique élément de B à chaque élément du domaine de définition A .

↳ Selon les cas, on doit vérifier:

- existence d'un élément image dans B :

exemple: on a $g: A \rightarrow B$

et $A' \subseteq A, B' \subseteq B$.

pour que la restriction $\bar{g}: A' \rightarrow B'$ soit bien définie, il faut que $\forall a \in A', g(a) \in B'$.

- unicité.

Crucial pour tous les passage au quotient:

on associe $\bar{g}: A/\sim \rightarrow B$

$[a] \rightarrow g(a)$

On doit montrer que si $[a] = [a']$, $g(a) = g(a')$.